3) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ; $V_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

On a $1 \leqslant k \leqslant n$

$\Rightarrow 1 \leqslant \sqrt{k} \leqslant \sqrt{n}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}(n - 1 + 1) \leqslant V_n$

$\Rightarrow \frac{n}{\sqrt{n}} \leqslant V_n$

$\Rightarrow \boxed{\sqrt{n} \leqslant V_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*}$

b) On a $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \; V_n \geqslant \sqrt{n}$

Ainsi $\boxed{\lim_{n \to +\infty} V_n = +\infty}$

Qarray.tn - Agra Blech - Qarray.tn